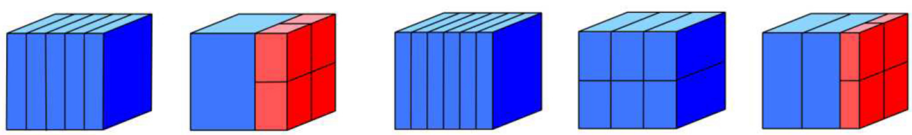
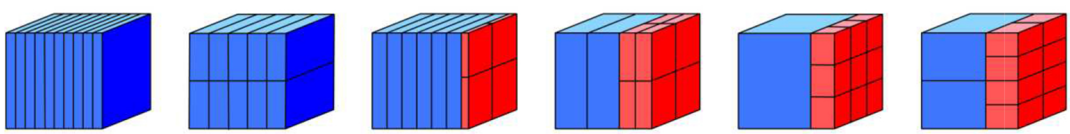
Uitwerking puzzel 91.6 **Wobien Doyer**
Het vullen van vierkanten of kubussen met rechthoeken of balken **Lieke de Rooij**

Bij deze puzzel, grotendeels een idee van Frits Göbel, moesten veel plaatjes worden gemaakt. Het is misschien wel leuk om te zien hoe dat door verschillende inzenders werd gedaan. Met de hand, al of niet met liniaal, of met de computer al of niet met een geavanceerd tekenprogramma. Alle variaties hadden hun eigen charme en waren duidelijk, hoewel helaas bij niemand helemaal volledig. Zie een selectie op blz. 3.

Opgave 1. We moesten voor n=5, 6 en 10 alle manieren bepalen hoe een kubus met ribbe 1 in n gelijkvormige balken is te verdelen. Dat kan op respectievelijk 2 ,3 en 6 manieren. Zie fig 1.1 - 1.11. Bijna alle figuren hebben vierkante stukjes, behalve 1.4, 1.7 en 1.11, daar zijn het halve vierkanten. De bijbehorende diktes zijn niet moeilijk te berekenen: voor 1.1 tm 1.11 respectievelijk $\frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{2}{13}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}$ en $\frac{2}{3}$ voor het grootste stukje.

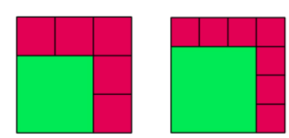


1.1 1.2 1.3 1.4 1.5



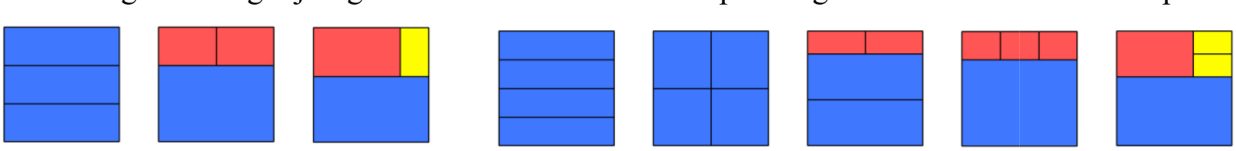
1.6 1.7 1.8 1.9 1.10 1.11

Opgave 2. Hier moesten alle waarden van n worden bepaald waarvoor het niet mogelijk is om een vierkant op te vullen met precies n vierkanten. We bekijken wanneer het wel lukt: Voor n=1 en n=4 is dat duidelijk. Maar het lukt ook met n=6 en n=8. (fig.2). Met een vierkant verdeeld in n vierkantjes kunnen we altijd een of meer van die vierkantjes in vieren delen, zodat we er steeds $3k$ vierkantjes aan toevoegen. Zo krijgen we startend met n=1, 6 en 8 (alle waarden modulo 3) alle n behalve n=2 ,3 en 5. Enkelen gaven een bewijs dat dat ook echt niet lukt, omdat er altijd in alle 4 de hoeken van het grote vierkant een klein vierkantje moet liggen. Voor n=2 of 3 lukt dat duidelijk niet. En ook blijft er met 4 kleine vierkantjes nooit een vierkant over om n=5 te maken.

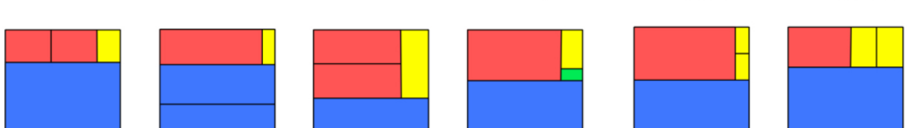


2.1 2.2

Opgave 3. Bepaal voor n=3 en n=4 alle mogelijkheden om een vierkant geheel te vullen met gelijkvormige rechthoeken. Voor n=3 viel dat wel mee, er zijn er 3 (fig. 3a). Maar met n=4 zijn er meer en dat bleek lastig. Het record was van J.Remijn, met 9 oplossingen. Er zijn er echter, door systematisch te werk te gaan 11 te vinden (fig.3b). Bij de eerste 2 van 3a en de eerste 5 van 3b liggen de stukjes allemaal in dezelfde richting (horizontaal) en is de verhouding r=breedte:lengte rationaal. Er geldt respectievelijk: $r = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ (3a.1 en 2) en $r = \frac{1}{4}, 1, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}$ en $\frac{3}{5}$ (3b 1-5) . De bijbehorende maten voor een vierkant met zijden 1 zijn daarmee vrij eenvoudig te berekenen. Voor de rest vinden we derdegraadsvergelijkingen met elk één irrationale oplossing tussen 0 en 1. Zie tabel op blz 2.

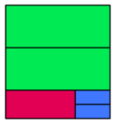


3a.1 3a.2 3a.3 3b.1 3b.2 3b.3 3b.4 3b.5

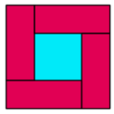


3b.6 3b.7 3b.8 3b.9 3b.10 3b.11

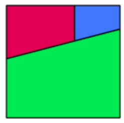
Opgave 4. Nu moest het vierkant worden gevuld met rechthoeken met verhouding *r* = breedte : lengte=3:8. Gevraagd werd voor welke *n* dat lukt. Helaas begrepen enkelen niet dat hiermee werd bedoeld om alle *n* te bepalen waarbij het lukt.
Iedereen begon met een vierkant met zijden van 24 in te delen in 24 rechthoeken van 3 bij 8 . Door die in twee blokken van 9, een van 4 en twee van 1 samen te voegen hebben we een oplossing voor *n*=5 (fig 4.1). Net als bij opgave 2 voor vierkanten, kunnen we nu rechthoeken verdelen in 4 of 6 (fig. 4.2) gelijkvormige rechthoeken zodat we steeds 3*k* of 5*k* bij *n*=5 kunnen optellen. Maar ook *n*+4*k* (zie fig.4.3). Zo maken we startend met fig. 4.1 (*n*=5) *n*=8,9,10 en dus ook alle *n*>10. Resteren *n*=1,2,3,4, 6 en 7.

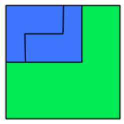

4.1


4.2


4.3

Opgave 5. Hier was de vraag of we ook een vierkant kunnen verdelen in 3 gelijkvormige figuren, anders dan rechthoeken. Er werden twee verschillende oplossingen gevonden: Zie fig. 5.1 en 5.2. Of er nog meer zijn: wie weet?


5.1


5.2

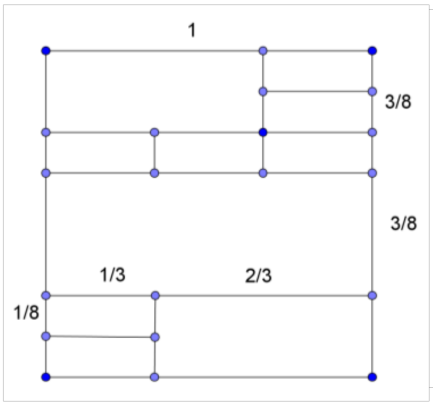
Tabel bij de irrationale oplossingen uit opgave 3		
Figuur	vergelijking	*r* (benadering in 3 decimalen)
3a.3	$r^3-r^2+2r-1=0$	0,570
3b.6	$r^3-r^2+3r-2=0$	0,715
3b.7	$2r^3-r^2+3r-1=0$	0,346
3b.8	$2r^3-2r^2+3r-1=0$	0,397
3b.9	$3r^3-2r^2+2r-1=0$	0,552
3b.10	$r^3-r^2+4r-2=0$	0,533
3b.11	$2r^3-2r^2+2r-1=0$	0,648

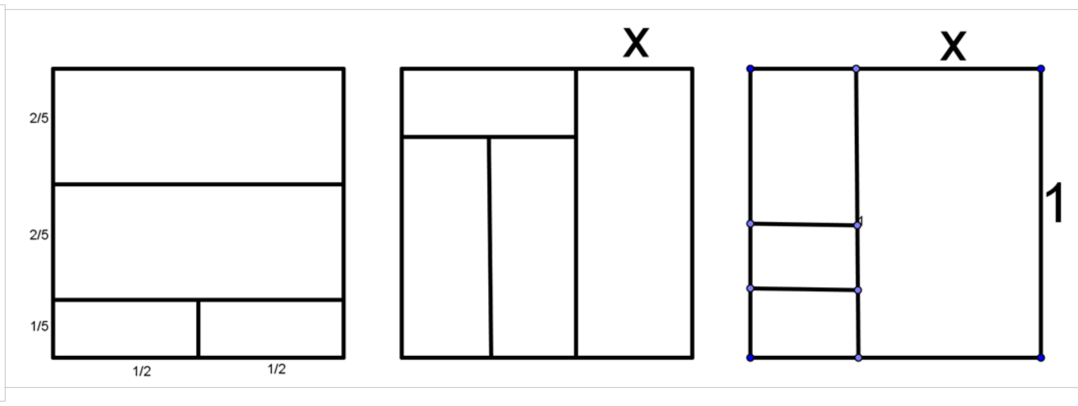
De ladderstand na 91-6 is:

Naam	**Punten**
K. Vugs	201
J. Verbakel	188
H. Linders	163
H. Klein	159
L. Pos	151
A. Grünefeld	120
J. Guichelaar	93
K. van der Straaten	78
J. Remijn	63
L. Cizkova	61
M. Woldinga	58

Naam	**Punten**
G. Bouwhuis	55
M. Rijnierse	51
F. van Hoeve	48
M. Müller	38
R. Stolwijk	38
G. Riphagen	35
H. Bakker	31
F. Göbel	31
F. de Boer	20
P. van der Linden	18
J. Meerhof	15

We feliciteren Kees Vugs van harte met de ladderprijs





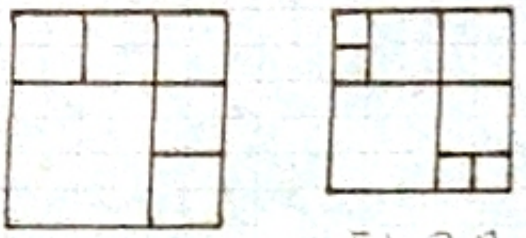
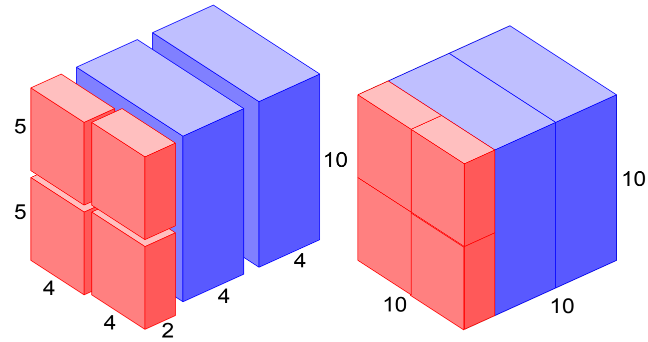
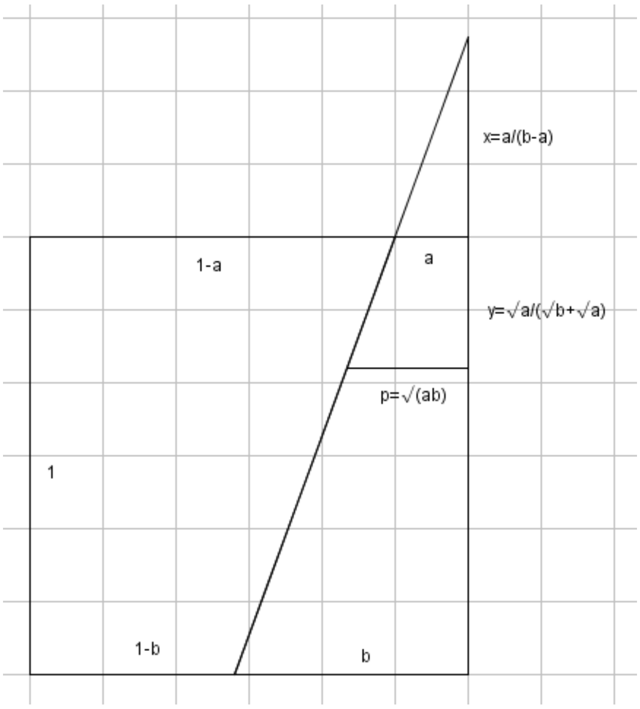
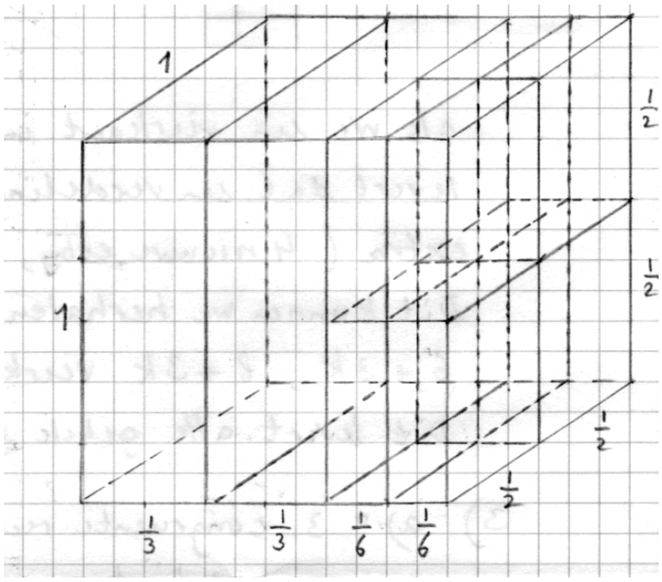
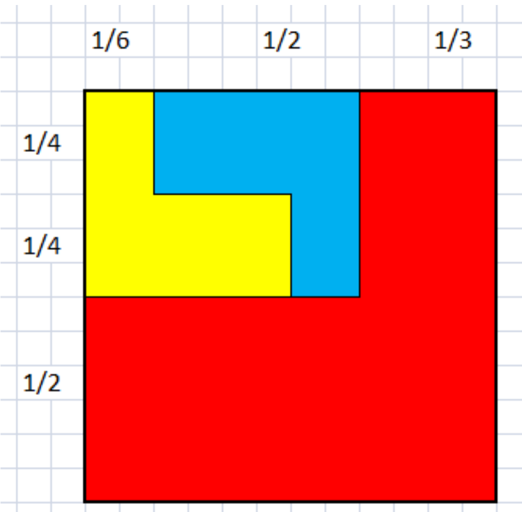


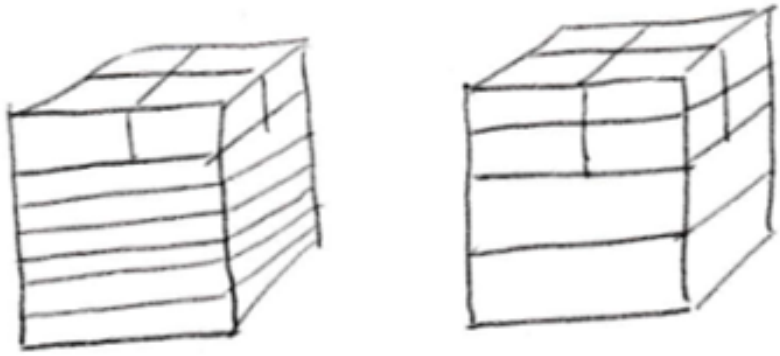
Fig 2.1 Fig. 2.2











10.3 10.4